Vektorgeometrie

Anwendungen

Schattenspiele

Datei Nr. 63240

Stand 24. September 2012

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Es gibt eine Reihe von Aufgaben, die einen Schattenwurf berechnen lassen.

Ich beginne hier mit einer ersten Aufgabe, weitere werden folgen.

Thema: Schattenwurf einer Pyramide auf eine benachbarte Pyramide

Aufgabe 1

In der Nähe von Kairo steht die Cheopspyramide neben der Chephrenpyramide. Die eine wirft einen Schatten auf die andere.

Für ein mathematisches Modell verwenden wir für die beiden Pyramiden folgende Koordinaten:

Pyramide 1: $A(-3|3|0)$. $B(3|3|0)$, $C(3|-3|0)$, $D(-3|-3|0)$, $E(0|0|5)$

Pyramide 2: $P(-5|-10|0)$, $Q(-5|-6|0)$, $R(-9|-6|0)$, $S(-9|-10|0)$, $T(-7|-8|3)$

a) Zeichne die Pyramide 1 in ein Schrägbild (x-Achse nach links unten um 135° gegen die nach rechts zeigende y-Achse, LE auf der x-Achse $\frac{1}{2}\sqrt{2}$).

Verwende die ganze Blattbreite und zeichne die Pyramide 1 an den rechten Rand.

b) Die Sonnenstahlen treffen in Richtung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} -12 \\ -16 \\ -7 \end{pmatrix}$ auf die Pyramide auf.

Berechne den Schattenpunkt Z_0 der Spitze E und zeichne den Schatten so ein, wie er auf der x-y-Ebene ohne die Pyramide 2 aussehen würde.

c) Trage die Pyramide 2 in die Zeichnung ein.
Berechne die notwendigen Punkte, die man benötigt, um auf ihr den Schatten der Pyramide 1 auf der Pyramide 2 einzutragen.

d) Unter welchem Winkel treffen die Sonnenstrahlen auf dem Boden auf?

(Quelle der Aufgabe unbekannt, Text wurde verändert)

Lösung Aufgabe 1

1. Berechnung des Schattenpunktes der Spitze E auf der xy-Ebene.

Dazu benötigt man den Lichtstrahl durch $E(0\,|\,0\,|\,5)$. Sein Richtungsvektor ist $\vec{v} = \begin{pmatrix} -12 \\ -16 \\ -7 \end{pmatrix}$.

Gleichung dieser Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -12 \\ -16 \\ -7 \end{pmatrix}$

Gleichung der xy-Ebene: z = 0.

Schnitt mit g: $0 = 5 + t \cdot (-7) \;\Leftrightarrow\; t = \frac{5}{7}$

Eingesetzt in g: $\vec{x}_{E'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{5}{7} \begin{pmatrix} -12 \\ -16 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{60}{7} \\ -\frac{80}{7} \\ 0 \end{pmatrix}$

Der Schattenpunkt der Spitze E: $E'\left(-\frac{60}{7}\,|\,-\frac{80}{7}\,|\,0\right) \approx (-8{,}6\,|\,-11{,}4\,|\,0)$

2. Berechnung des Schattenpunktes der Spitze E mit der Pyramidenfläche PQT.

Gleichung der Ebene (PQT): $\vec{x} = \overrightarrow{OQ} + r \cdot \overrightarrow{QP} + s \cdot \overrightarrow{QT}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt Z mit dem E-Strahl: $\begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -12 \\ -16 \\ -7 \end{pmatrix}$

Gleichungssystem:
$$\left\{\begin{array}{r} -2s + 12t = 5 \\ -4r - 2s + 16t = 6 \\ 3s + 7t = 5 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

$3 \cdot (1)$: $-6s + 36t = 15$ (4)

$2 \cdot (3)$: $6s + 14t = 10$ (5)

(4) + (5): $50t = 25 \;\Leftrightarrow\; t = \frac{1}{2}$

Man benötigt vor allem r und s um zu erkennen, ob der Schnittpunkt Z auch wirklich innerhalb des Dreiecks QPT liegt.

t in (1): $-2s + 6 = 5 \;\Leftrightarrow\; -2s = -1 \;\Leftrightarrow\; s = \frac{1}{2}$

t, s in (2): $-4r - 1 + 8 = 6 \;\Leftrightarrow\; -4r = -1 \;\Leftrightarrow\; r = \frac{1}{4}$.

Da r und s in $\vec{x} = \overrightarrow{OQ} + r \cdot \overrightarrow{QP} + s \cdot \overrightarrow{QT}$ Werte aus dem Intervall $]0;1[$ haben und außerdem gilt $0 < r + s < 1$, liebt Z wirklich im Innern der Pyramiden-Dreiecksfläche. Also trifft der E-Strahl auf diese Fläche auf, und zwar im Punkt $Z(-6\,|\,8\,|\,1{,}5)$ $\left(t = \frac{1}{2}\right.$ in g eingesetzt).

3. Knick des Schattenrandes an der Pyramidenkante

Die Schattenlinie der Kante AE trifft also Folge davon die Kante QT in einem Punkt Z*.
Diesen berechnet man durch folgende Idee: Der Schatten der Kante AE bildet im Raum eine Ebene F in Richtung der Sonnenstrahlen $\vec{v}$. Diese Ebene schneidet man mit der Pyramidenkante QT.

Gleichung der Schattenfläche von AE aus.

F:
$$\vec{x} = \overrightarrow{OE} + r \cdot \overrightarrow{EA} + s \cdot \vec{v}$$
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ -16 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Gleichung der Pyramidenkante QT:
$$\vec{x} = \overrightarrow{OQ} + t \cdot \overrightarrow{QT}$$
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt:
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ -16 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Gleichungssystem:
$$\left\{ \begin{array}{r} -3r - 12s + 2t = -5 \\ 3r - 16s + 2t = -6 \\ -5r - \ \ 7s - 3t = -5 \end{array} \right\}$$

Die Lösung (ihre Berechnung wird hier nicht gezeigt) lautet: $r \approx 0{,}133$, $s \approx 0{,}45$ und $t \approx 0{,}40$.

Mittels t kann man aus der Gleichung der Pyramidenkante den Knickpunkt Z* berechnen:

$$\vec{z} \approx \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}4 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5{,}8 \\ -6{,}8 \\ 1{,}2 \end{pmatrix}$$

Ergebnis: $Z^*\left(-5{,}8 \,|\, -6{,}8 \,|\, 1{,}2\right)$

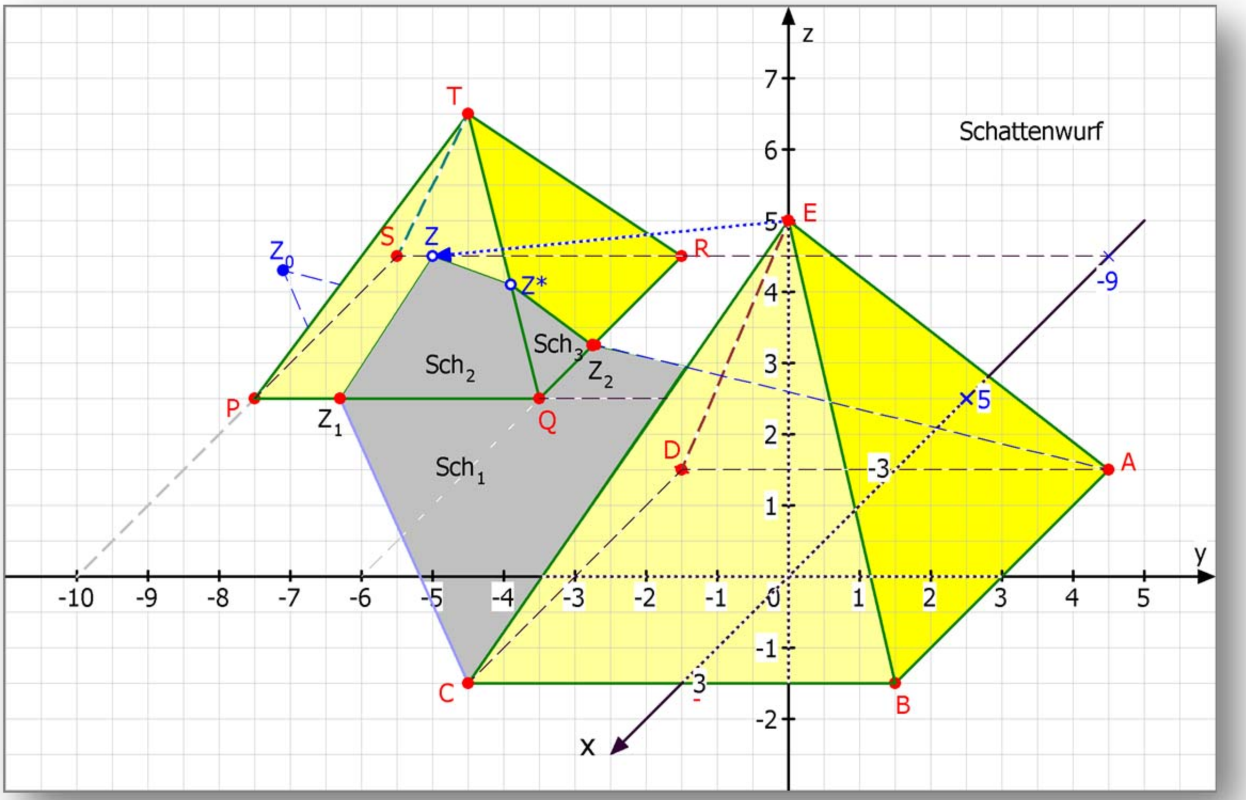
d) Berechnung des Auftreffwinkels γ der Sonnenstrahlen auf der xy-Ebene.

Einen Winkel zwischen einer Geraden mit dem Richtungsvektor $\vec{v}$ und dem Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene wird berechnet durch die Formel: $\cos\gamma = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|}$.

Aus $\vec{v} = \begin{pmatrix} -12 \\ -16 \\ -7 \end{pmatrix}$ und $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ folgt: $\cos\gamma = \frac{7}{\sqrt{449} \cdot 1} \approx 0{,}33$ also $\gamma \approx 70{,}7^{\circ}$.

(Gemessen gegen die Vertikale).

Zeichnung (Erstellt mit Mathegrafix, Version 10)



Hinweise zur Schattenkonstruktion auf der Pyramide 2.

Z_0 ist der Schatten von E auf dem Erdboden ohne das Vorhandensein der Pyramide 2.

Am Schnittpunkt der Schattenlinie CZ_0 mit der Pyramidenkante PQ entsteht der erste Knickpunkt Z_1 des Schattens an der Pyramidenfläche PQT.
Auf ihr liegt auch der Schattenpunkt Z der Spitze E, den man berechnen musste.
Dann kann man die Schattenkante Z_1Z einzeichnen.

Wegen des Vorhandenseins der Pyramidenkante QZ geht der Schatten nicht gradlinig von Z nach Z_2, dem Schnittpunkt der Schattenlinie AZ_0 mit der Kante QR.
Es wurde daher notwendig, den Knickpunkt Z* auf der Kante QT zu berechnen.
Dies geschah als Schnitt der Ebene AEZ_0 mit eben dieser Kante QT.

Hinweis: Die Darstellung der 3-D-Punkte in einem 2-D-Koordinatensystem ist eine Abbildung mit folgenden Abbildungsgleichungen: (Winkel 135^0; $k = \frac{1}{2}\sqrt{2}$)

Gegeben: $P(x \mid y \mid z)$, gesucht $\overline{P}[\overline{x} \mid \overline{y}]$:

$$\left\{\begin{array}{l} \overline{x} = y - \frac{1}{2}x \\ \overline{y} = -\frac{1}{2}x + z \end{array}\right\}$$